52. matemaatikaolümpiaad
2. voor (piirkonnavoor)
12. klass
Ülesanded

Juhis: *Lahenduskäik koos põhjenduste ja arvutustega peab olema selgesti äratuntav ning esitatud loogiliselt ja grammatiliselt korrektsete lausetega. Lahenduses kasutatud väited tuleb tõestada, kui nad ei ole koolist tuntud. Tõestusest võib lisaks loobuda ka juhul, kui väitel on omaette nimi ning teda võib lugeda üldtuntuks.*

521221

Leida võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}&=4,\\ (x+y)^2+(x-y)^2&=82 \end{aligned}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

521222

Leida kõik algarvud p, millel on omadus, et $7p+1$ on täisarvu kuup.

521223

Lõik $\overline{AB}$ on ringjoone k diameeter. Punkt C on lõigu $\overline{AB}$ sisepunkt. Sirge g on punktis C lõiguga $\overline{AB}$ risti. Punkt D on sirge g lõikepunkt ringjoonega k. Ringjoon k_1 puutub sirget g punktis D ning läbib punkti A.

Tõestada, et ringide k ja k_1 raadiused on võrdsed.

521224

Olgu a, b, c ja d neli mittenegatiivset reaalarvu, mille korral $a+b+c+d=1$. Tõestada, et kuus arvu

$$\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \ \sqrt{a}+\sqrt{c},\ \ \sqrt{a}+\sqrt{d},\ \ \sqrt{b}+\sqrt{c},\ \ \sqrt{b}+\sqrt{d}\ \text{ja}\ \sqrt{c}+\sqrt{d}$$

ei saa olla korraga väiksemad kui 1.

52. matemaatikaolümpiaad
2. voor (piirkonnavoor)
12. klass
Lahendused

521221 lahendus *10 punkti*

Olgu (x, y) reaalarvupaar, mis rahuldab võrrandisüsteemi

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4, \tag{1}$$
$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 82. \tag{2}$$

Võrdust (1) ruutu tõstes saame

$$(x+y) + 2\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x-y} + (x-y) = 16,$$
$$\sqrt{x^2 - y^2} = 8 - x$$

ning veel kord ruutu tõstes

$$x^2 - y^2 = (8-x)^2 = 64 - 16x + x^2,$$
$$y^2 = 16x - 64. \tag{3}$$

Võrdus (2) annab sulgude avamisel

$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 82,$$
$$x^2 + y^2 = 41. \tag{4}$$

Asendades seose (3) seosesse (4), saame

$$x^2 + 16x - 105 = 0,$$
$$x_{1,2} = -8 \pm \sqrt{169} = -8 \pm 13.$$

Seega saab olla ainult $x = 5$ või $x = -21$.

Seose $y^2 \geq 0$ tõttu järeldub võrdusest (3), et $x \geq 4$. Võimaliku lahendi ainsaks väärtuseks jääb $x = 5$.

Võrdusest (3) järeldub edasi $y^2 = 16$ ehk $y_{1,2} = \pm 4$.

Et $\sqrt{5+4} + \sqrt{5-4} = 3 + 1 = 4$ ja $(5+4)^2 + (5-4)^2 = 81 + 1 = 82$, siis rahuldavad mõlemad võimalused võrrandisüsteemi.

Tulemus: võrrandisüsteemil on parajasti kaks lahendit, nimelt paarid

$$(x, y) = (5, -4) \qquad \text{ja} \qquad (x, y) = (5, 4).$$

<u>521222 lahendus</u> *10 punkti*

Eeldame, et p on ülesande tingimusi rahuldav algarv. Siis leidub selline täisarv x, et $x^3 = 7p+1$. Kindlasti $x^3 \geq 15 > 8$, seega $x > 2$.

Peale selle

$$7p = x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Et $x > 2$, siis on mõlemad tegurid arvu $7p$ pärisjagajad. Et aga arvul $7p$ pole muid pärisjagajaid peale 7 ja p, peab olema $x - 1 = 7$ või $x^2 + x + 1 = 7$.

Esimene juht annab $x_1 = 8$ ja $p = 73$.

Teisel juhul on ruutvõrrandi lahendid $x_2 = 2$ ja $x_3 = -3$. Kuid kumbki neist ei rahulda võrratust $x > 2$.

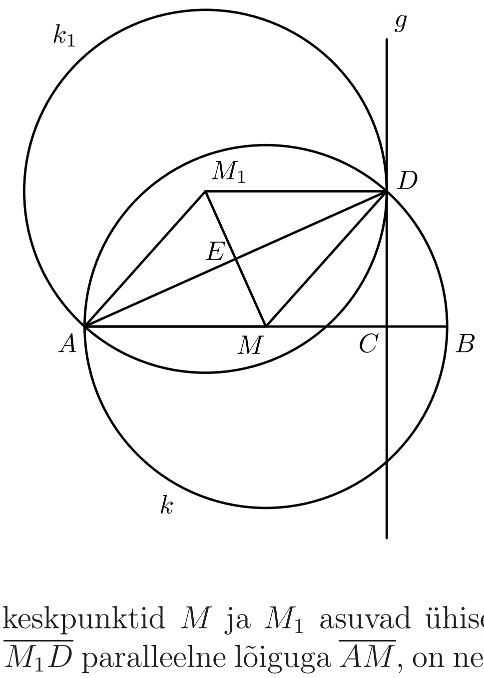
Kui $p = 73$, siis $7p + 1 = 7 \cdot 73 + 1 = 512 = 8^3$. Seega on $p = 73$ ainuke lahend.

<u>521223 lahendus</u> *10 punkti*

Olgu ringjoonte k ja k_1 keskpunktid vastavalt M ja M_1 ning tähistagu E lõigu $\overline{AD}$ keskpunkti. Et $\overline{AC}$ ja $\overline{M_1D}$ on sirgega g risti, on nad omavahel paralleelsed. Järelikult on nurgad MAE ja M_1DE põiknurkadena teineteisega võrdsed.

Et ringi keskpunkti ja kõõlu keskpunkti ühendav sirge on kõõlu keskristsirge, siis $|\angle AEM| = |\angle DEM_1| = 90°$.

Et lõigud $\overline{AE}$ ja $\overline{DE}$ on ühepikkused, on kolmnurgad MEA ja M_1ED tunnuse NKN järgi võrdsed. Järelikult $r = |MA| = |M_1D| = r_1$.



Teine lahendus. Ringjoonte keskpunktid M ja M_1 asuvad ühise kõõlu $\overline{AD}$ keskristsirgel. Et konstruktsiooni tõttu on lõik $\overline{M_1D}$ paralleelne lõiguga $\overline{AM}$, on nelinurk $AMDM_1$ romb, ringide raadiused $\overline{M_1D}$ ja $\overline{MA}$ on võrdsed.

<u>521224 lahendus</u> *10 punkti*

Eeldame, et kõik kuus summat on väiksemad kui 1. Tähistades $s := \sqrt{a}$, $t := \sqrt{b}$, $u := \sqrt{c}$ ja $v := \sqrt{t}$ saame siis

$$s + t < 1, \quad s + u < 1, \quad s + v < 1, \quad t + u < 1, \quad t + v < 1, \quad u + v < 1$$

ning

$$s^2 + t^2 + u^2 + v^2 = 1.$$

Üldisust kitsendamata olgu s suurim nendest neljast arvust. Siis $1 \geq s^2 \geq \frac{1}{4}$, seega $1 \geq s \geq \frac{1}{2}$. Järelikult t, u, $v < 1 - s$ ning ühtlasi t^2, u^2, $v^2 < (1-s)^2$, seega

$$s^2 + t^2 + u^2 + v^2 < s^2 + 3(1-s)^2 = 4s^2 - 6s + 3 = 4\left(s - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Seoste $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ tõttu aga $\left|s - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{1}{4}$, millest järeldub kohe, et parema poole väärtus on ülimalt 1. Järeliklt peab kehtima $s^2 + t^2 + u^2 + v^2 < 1$. See on vastuolu.

Teine lahendus. Et nii eeldus kui ka väide on sümmeetrilised a, b, c ja d suhtes, võime üldisust kitsendamata eeldada, et $a \geq b \geq c \geq d$. Nüüd $4a \geq a + b + c + d = 1$, seega $2\sqrt{a} \geq 1$, millest $1 + \sqrt{a} \geq 3(1 - \sqrt{a})$. Samuti $3b \geq b + c + d = 1 - a$, järelikult

$$\sqrt{b} \geq \sqrt{\frac{1-a}{3}} = \sqrt{\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}{3}} \geq 1 - \sqrt{a}$$

millest saamegi soovitud seose $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1$.

Kolmas lahendus. Nii nagu teises lahenduses, võime eeldada, et $a \geq b \geq c \geq d$. Nüüd aga $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b + 2b \geq a + b + c + d = 1$. Sellest järeldub vahetult $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1$.

Hindamisskeemid

Iga üksiku *ülesande* eest ette nähtud punktide arv on kohustuslik.

Õpilase lahenduskäigu üksikute *sammude* eest antavate punktide arv on hindaja otsustada (järgides põhimõtet „sammu kasutatavus sihile viivas lahenduskäigus“); õpilase lahenduse hindamisel tuleks võimaluse korral rakendada järgnevaid punktijaotusi, neid võib selles mõttes üksikutel juhtudel ka muuta.

Ülesanne 521221 *Kokku: 10 punkti*

Lähenemine ruututõstmise või sobiva asenduse kaudu	2 punkti
Edasised teisendused ja järeldused kuni kõigi lahendikandidaatide esitamiseni	5 punkti
Lahendite kontroll ja vastuse selge esitamine	3 punkti

Ülesanne 521222 *Kokku: 10 punkti*

Esitus kujul $x^3 = 7p + 1$ vms	1 punkt
Järeldus $x > 2$	1 punkt
Avaldise $x^3 - 1$ tegurdamine või võrreldav samm, mis võimaldab rakendada jaguvusargumente	3 punkti
Arvu $7p$ algtegurite kõikvõimalike jaotumiste uurimine koos kõigi juhtude arvestamisega	3 punkti
Üleliigsete lahendikandidaatide välistamine ja arvu 73 lahendiks olemise kontrollimine, arvu 73 otsene nimetamine ainsa lahendina	2 punkti

Ülesanne 521223 *Kokku: 10 punkti*

Ülesande geometrilise konfiguratsiooni mõistmine (nt õige joonis)	1 punkt
Abipunktide ja -joonte (nagu M, M_1, E või romb $AMDM_1$ näitelahendustes) sissetoomine	3 punkti
Lõppjäreldused nt üle nurkade võrdsuste või paralleelsuste kuni vajaliku väiteni	6 punkti

Ülesanne 521224 *Kokku: 10 punkti*

Tõestuslik lähenemine (kaudne tõestus või arusaamine, et piisab näidata, et üks konkreetne summa kuuest on ≥ 1)	2 punkti
Sobivale järjestusele (nagu $a \geq b \geq c \geq d$) spetsialiseerumine	2 punkti
Sobiva võrratuse ärakasutamine ülesande lihtsustamiseks (nagu taandamine parameetrile s esimeses lahenduses, võrratus $2\sqrt{a} \geq 1$ teises lahenduses või lähenemine $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ abil kolmandas lahenduses)	2 punkti
Edasised tõestussammud kuni vajaliku väite järeldamiseni	4 punkti